Inleiding

Vooraf
De behoefte om 'iets' met π te doen onstond bij mij toen in een hoofdstuk over omtrek, oppervlakte en inhoud van de tweede klas de cirkel onder handen werd genomen.[1] In de eerste opgave van die paragraaf mogen leerlingen zelf meten aan de omtrek van een cirkel. De bedoeling is dat ze ontdekken dat de verhouding omtrek en diameter steeds zo'n beetje hetzelfde is. Dat vond ik op zich wel aardig, het idee hebben we gebruikt in les 1. Maar dan komt het:

> **Omtrek cirkel** De omtrek van een cirkel is ongeveer 3,14 keer zo lang als de diameter. Er geldt:
> *omtrek = p x diameter*
> waarbij π (pi) ongeveer 3,14 is.

... en dat is dat. Dat moet volgens mij veel beter kunnen. Ik vind het teveel een 'kunstje', het is geen moeilijk 'kunstje', maar er blijven zo veel vragen over...

Omdat we voor 'Geschiedenis van de Wiskunde II' toch aan het werk moesten, hebben we er voor gekozen wat meer te doen met π. De geschiedenis van π is in ieder geval zo uitgebreid, dat de kans dat we geen bruikbaar materiaal kunnen vinden minimaal kan worden geschat.[2]

We hebben geprobeerd in een serie lessen, vier in getal, iets te laten zien van de geschiedenis van π. Belangrijk uitgangspunt daarbij is om een tipje van de sluier rond het mysterie π op te lichten. Wiskunde is mensenwerk en wiskunde is steeds in ontwikkeling. In de lessen hebben we geprobeerd de zoektocht naar π een beetje te volgen.

[1] NETWERK 2 havo/vwo, Wolters-Noordhoff Groningen. blz. 73 e.v.
[2] Het boek 'Woordenboek van Eigenaardige en Merkwaardige Getallen' van David Wells bevestigde snel ons vermoeden.

Grote lijnen en achtergronden

De geschiedenis van π is zeer omvangrijk. We komen de verhouding van diameter en omtrek tegen in de Bijbel, bij de oud-Egyptische wiskunde, bij de Babyloniërs, bij de Grieken, in Arabië, in China en India, en in de Europese landen.
Het is nog niet eens zo lang geleden dat Tamura & Kanada vrijwel alle kranten gehaald hebben met de berekening van 16 miljoen decimalen van π.[3]

We starten in les 1 met de Bijbeltekst uit 1 Koningen 7:23. Bij de beschrijving Salomo's paleis wordt het metaalwerk van de tempel beschreven. Koning Salomo gaf Hiram uit Tyrus opdracht om het werk uit te voeren. Er wordt zeer uitgebreid beschreven hoe het koperwerk er uit zag:

> Hij vormde namelijk de beide koperen zuilen; achttien el was de ene zuil hoog, een een meetsnoer van twaalf el kon haar omspannen, en evenzo was het bij de tweede zuil.[4]

De bijbelse el is ongeveer 49,5 cm.[5] Een koperen zuil van ongeveer 9 meter hoog met een doorsnede van 2 meter!

We vervolgen met $3^1/_8$ van de Babyloniërs. Lange tijd werd er van uit gegaan dat in Mesopotanië voor de oppervlakte van een cirkel drie keer het kwadraat van de straal werd genomen. In 1936 echter heeft men in Susa, een paar honderd kilometer van Babylon, een aantal kleitabletten gevonden. Vanuit één van deze kleitabletten kan worden afgeleid dat de schrijver de waarde $3^1/_8$ heeft gebruikt om de oppervlakte van een cirkel uit te rekenen.[6]

Naast de omtrek laten we in les 1 leerlingen ook de oppervlakte uitrekenen. Dit doen we (bijna) op de manier waarop de oud-Egyptenaren dat deden, althans zo als dat beschreven wordt in de papyrus Rhind:

> De Egyptische klerk Ahmes schreef in de papyrus Rhind (1500 v.Chr.) dat de oppervlakte van een cirkel gelijk is aan 8/9 kwadraat maal de diameter, wat voor π een waarde van $(16/9)^2$ ofwel 3,16049.. betekent.[7]

Hier is vermoedelijk 'in het kwadraat' achter diameter weggevallen.
Maar het kan anders:

> Het oppervlak van de cirkel met middellijn d werd uit de formule $(d-{}^d/_9)^2$ berekend, hetgeen tot een waarde van π=256/81 leidt...[8]

Dat komt weliswaar op hetzelfde neer, maar geeft toch beter weer wat er in de papyrus Rhind staat.

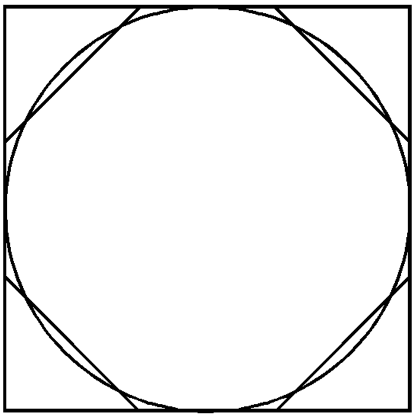
[3] Wells, blz. 44 e.v.
[4] Bijbel, Het Nederlands Bijbelgenootschap, Amsterdam, 1969.
[5] Nieuwe Kleine Winkler Prins, blz. 1625.
[6] Boyer & Merzbach, blz. 44.
[7] Wells, blz. 45.
[8] Struik, blz. 26.

Bij de berekening van de inhoud van een cilinder met een diameter van 9 en een hoogte van 10 staat er in de papyrus Rhind:

> 1/9 van 9 is 1. Er blijft 8 over. 8 keer 8 is 64. Vermenigvuldig 64 met 10 en je krijgt de 640 kubieke el. Tel de helft er bij op en je krijgt 960, dat is de inhoud in *khar*. Neem 1/20 van 960, dat is 48. De inhoud is 4800 *hekat*.[9]

Een interessante vraag is natuurlijk: hoe komen de Egyptenaren aan deze 'benadering' van π?

Volgens Boyer & Merzbach(1989) geeft probleem 48 van de papyrus Rhind misschien een aanwijzing. In het probleem wordt een (onregelmatige) achthoek gemaakt van een vierkant met zijde 9. Door de zijden in drieën te verdelen en de buitenste punten te verbinden ontstaat door weglating van de driehoekjes een achthoek. De oppervlakte van deze achthoek (=63) wijkt niet veel af van de oppervlakte van een vierkant met zijde 8.[10]
De oppervlakte van de ingeschreven cirkel is dus 64.
Dit zou leiden tot een waarde van π van $4.(^8/_9)^2 = {}^{256}/_{81}$
Hieronder staat een vertaling van probleem 48.[11]



Probleem 48
Vergelijk de oppervlakte van een cirkel en zijn omgeschreven vierkant.

De cirkel met diameter 9.		Het vierkant met zijde 9.	
1	8 setat	\1	9 setat
2	16 setat	2	18 setat
4	32 setat	4	36 setat
\8	64 setat	\8	72 setat
		Total	81 setat

In les 1 wordt nog even gewezen op het feit dat het symbool π voor de verhouding van omtrek en diameter pas gebruikt word vanaf de 18^e eeuw.[12]
Het symbool komt in een paar geschriften van de 17^e en 18^e eeuw voor, maar werd pas algemeen aanvaard nadat Euler het in zijn veel gelezen 'Introductio' van 1748 geregeld had gebruikt.[13]

In les 2 laten we leerlingen eerst zelf proberen om met behulp van een regelmatige veelhoek een benadering voor π te vinden. Hier komt Archimedes ter sprake. De door ons gevolgde methode lijkt op de manier waarop Archimedes tot de benadering kwam van ${}^{223}/_{71} < \pi < {}^{22}/_7$.[14]

---

[9] Geschiedenis van de Wiskunde, FEO Hogeschool Utrecht, 1995/1996, blz. 49.
[10] Boyer & Merzbach, blz. 20.
[11] Fauvel & Gray, eds. The History of Mathematics - a reader, Houdmills, London 1987, blz. 16 e.v. zie [6] (Let vooral op de tekening)
[12] De griekse letter π, omdat omtrek in het latijn 'perimeter' is.
[13] Struik, blz.59
[14] Het bewijs kan men nalezen in: T.L.Heath (ed.), The Works of Archimedes, Cambridge 1897. blz. 93-98. (zie [6])

Andere benaderingen, als van Ptolemeus, Zu Chongzhi en Al-Khasji worden even genoemd.[15]

Claudius Ptolemeus is een Griekse sterrenkundige, schrijver van de 'Almagest' (ca.150 n. C.), een groot astronomisch meesterwerk waar onder andere over goniometrie geschreven wordt, met een koordentafel voor verschillende hoeken. [16]

De Chinese fascinatie voor π bereikte zijn hoogtepunt in het werk van Zu Chungzhi (430-501). Een van zijn waarden was dezelfde als van Archimedes' 22/7, maar door Zu Chungzhi omschreven als 'onnauwkeurig'. Zu's nauwkeurige waarde was 355/113. De berekeningen die hij en zijn zoon uitgevoerd hebben om tot deze benadering te komen, zijn verloren gegaan. Het resultaat was uniek voor die tijd. Het is niet voor niets dat men een maankrater naar Zu Chungzhi heeft genoemd.

Al-Khasji, een Arabische wetenschapper, stierf in 1436. Al-Khasji is een belangrijk figuur in de ontwikkeling van decimale breuken. Zijn sterke kant was de nauwkeurigheid waarmee hij rekende. Al-Khasji gaf zijn een benadering voor 2π in decimale notatie:

6,2831853071795865

Dit resultaat werd pas laat in de 16^{e} eeuw door Ludolph van Ceulen verbeter.[17]

Een groot gedeelte van de 'Arabische' wiskunde en bijna de gehele Chinese wiskunde hadden nog steeds een sterk algoritmisch-algebraïsch karakter, net als alle oosterse wiskunde, maar vergeleken met de antieke methoden was het een flinke stap vooruit.[18]
In West-Europa bereikt men pas tegen het einde van de 16^{e} eeuw een niveau dat met deze Arabisch-Chinese wiskunde kan worden vergeleken.

Indische, Arabische en Chinese wiskunde hebben elkaar ongetwijfeld wederzijds beïnvloed. Van een directe Chinees-Griekse beïnvloeding is weinig te bespeuren, ondanks het bestaan van parallelle ontwikkelingen. Een aardig detail is dat de waarde voor π van Zu Chungzhi van 355/113 verkregen kan worden uit de waarde 377/120 (Ptolemeus) en 22/7 (Archimedes) door tellers en noemers van elkaar af te trekken. Als men per sé wil volhouden dat er van directe beïnvloeding sprake moet zijn geweest, zou men dit als argument kunnen gebruiken.[19]

Aan de hand van een tekst uit 'Grondbeginselen der meetkunde' van J.H. van Swinden [20] komen we in les 2 de namen tegen van Archimedes, Ludolf van Ceulen en Metius. Een oefening in het lezen van een tekst, waarom niet?

[15] Wells, blz. 45 e.v.
[16] Struik, blz.67
[17] 20 decimalen in 1596. Boyer & Merzbach, blz. 358.
[18] Struik, blz. 90
[19] Boyer & Merzbach, blz. 228.
[20] J.H. van Swinden in BRONNEN bij geschiedenis B, blz. 26 en 27.

Ludolph van Ceulen, een wiskundige en schermmeester in Delft, heeft een groot deel van zijn leven gewijd aan het berekenen van π. Hij berekende π eerst in 20 decimalen ('Van den Circkel', 1596), later in 35 decimalen, door steeds meer en meer in- en omgeschreven veelhoeken te berekenen.[21] De waarde van π in 35 decimalen was op zijn grafsteen in de Pieterskerk in Leiden uitgebeiteld.[22] Toen bij het herbouwen van die kerk de grafsteen werd vernietigd, was het grafschrift al opgenomen in een beschrijving van Leiden, zodat het levenswerk van Ludolf van Ceulen bewaard bleef.[23]

De waarde 355/113 wordt wel eens de waarde van Metius genoemd. Rond dezelfde tijd als Ludolf van Ceulen 'ontdekte' Adriaen Metius, professor in Franeker [24], bij toeval Zu Chungzhi's precieze benadering 355/113, door uit te gaan van twee grenzen die door zijn vader waren berekend, 377/120 (Ptolemeus!) en 333/106, en gewoon maar het gemiddelde van de tellers en het gemiddelde van de noemers te nemen.[25]

Een aardig detail is dat in Duitsland π ook wel wordt aangeduid met 'De constante van Ludolf'[26], terwijl in Engelstalige landen men π ook wel aanduidt met 'De constante van Archimedes'[27].

In les 3 beginnen we met een alcoholvrije versie van "I like a drink..."[28]. Daarop volgend geven we een (onvolledig) overzicht van de berekening van steeds meer decimalen van π.[29]

In les 3 willen we iets laten zien van het voorkomen van π in misschien onverwachte situaties.
We kijken naar een 'ontdekking' van Leibniz in 1673[30]:
Verder kijken we naar:[31]
Maar dan op een heel eenvoudig niveau. Het is alleen bedoeld om te laten zien dat π niet zo maar een

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

constante is, maar een constante die elke keer weer opduikt. Met het bijbehorende

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

computerprogramma kan men demonstreren hoe zoiets in z'n werk gaat.

---

[21] De methode is niet wezenlijk anders dan de methode van Archimedes, maar door de ontwikkeling van betere rekenmethode leverde dit een nauwkeuriger resultaat op.
[22] Struik, blz.111.
[23] Wells, blz.46.
[24] Struik, blz.90 en 91.
[25] Wells, blz.46.
[26] Wells, blz. 46.
[27] Surfen op het World Wide Web levert in 'no time' pagina's vol informatie op over π en Archimedes' Constant. Met heel veel verwijzingen naar literatuur en andere 'sites'.
[28] A.J.Goddijn, Decimalen van heinde en ver, Nieuwe Wiskrant, april 1995.
[29] Wells, blz.44 e.v..
[30] Boyer & Merzbach, blz. 451. Deze oneindige rij is een van de eerste ontdekkingen van Leibniz, maar schijnt een bijzonder geval te zijn van een rij die eerder door Gregory gegeven werd.
[31] Wells, blz.51

Aan de hand van het 'naaldenprobleem' van Graaf Georges Buffon (1707-1788), maken de leerlingen (voor het eerst?) kennis met kansen. Hierbij komen ze natuurlijk π weer tegen. Buffon stelde dat bij het willekeurig laten vallen van een naald op een gearceerd oppervlak, de kans dat de naald een lijn raakt gelijk is aan 2L/πd. Hierbij is L de lengte van de naald en d is de afstand tussen de lijnen. Hierbij moet L<d.[32]

Aan het einde van les 3 komt nog even de rekenmachine aan bod. In het licht van de geschiedenis hebben leerlingen het toch maar makkelijk. Ze drukken even een toetsje in en hebben de beschikking over een benadering voor π met 7 à 9 decimalen.

Men zou nog iets kunnen doen met de verborgen decimalen van de rekenmachine. Er staat wel 3,141592654 op het scherm (10 posities), maar in het geheugen staat wel degelijk 3,1415926536 (11 posities), dus eigenlijk zijn het zelfs 10 decimalen, de rekenmachine rekent met meer decimalen dan het schermpje laat zien.[33]

Kortom: handig zo'n knopje voor π, want dit betekent dat leerlingen met de rekenmachine nauwkeuriger kunnen rekenen dan wanneer je ze wil doen laten geloven dat π ongeveer 3,14 is. Dat is naar ons idee niet nodig.

In les 4 eerst maar eens de formules voor de omtrek en de oppervlakte van een cirkel op een rijtje gezet.

We vertellen iets over de kwadratuur van de cirkel. Hierover zou men een boek kunnen schrijven.[34] In Wells (1986) kan men een paar mooie verhalen vinden, want volgens Wells leiden veel cirkelkwadrateerders aan een zo ziekelijk zelfvertrouwen dat het ras wel nimmer zal uitsterven.[35]

Voor wiskundigen werd het probleem van de kwadratuur van de cirkel opgelost in 1882 door Ferdinand Lindemann, die bewees dat π transcedent is. Dat wil zeggen: niet de oplossing is van een algebraïsche vergelijking met rationale coëfficienten en eindig veel termen. Omdat elke, met een passer en lineaal te construeren getal aan zo'n vergelijking voldoet, kan een dergelijke constructie nooit tot de kwadratuur van de cirkel leiden.[36]

In les 4 tenslotte wat oefeningen met het rekenen aan cirkels en cirkelsegmenten. In de laatste opdracht kijken we nog één keer naar probleem 41 van de papyrus Rhind.[37]
Dan zijn we weer waar we begonnen waren.

---

[32] Boyer & Wells, blz.507.

[33] Wij hebben het hier over een CASIO fx-82 SUPER FRACTION. Deze rekenmachine rekent met 13 posities, maar geeft er 10 op het scherm. Een eenvoudige test bewijst dit: Toets 1÷3= en trek van dit antwoord 0,333333333 af.
Resultaat: $3{,}33.10^{-10}$. De reden voor het gebruik van 'verborgen' decimalen is heel eenvoudig: Nu levert $(3^{-1})^{-1}$ weer 3 op. Zonder de 'verborgen' decimalen zou dat niet zo zijn.

[34] :-) Dit is een grapje....

[35] Wells, blz. 49 e.v.

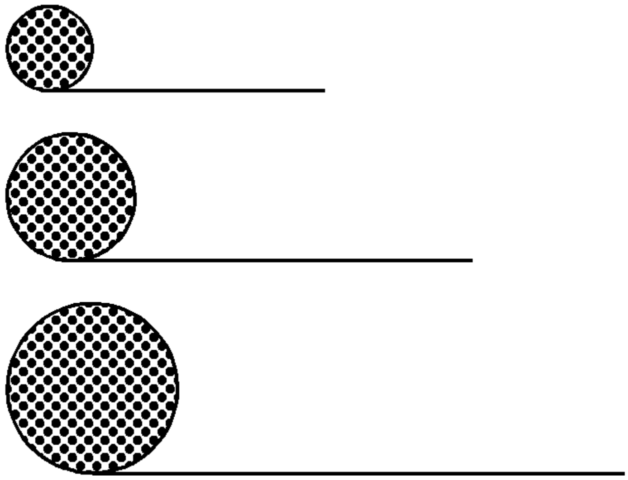
[36] Wells, blz. 50. Zie ook Boyer & Merzbach, blz. 639.

[37] Zie [6]

Les 1

Hoe bereken je de omtrek en de oppervlakte van een cirkel?

Opdracht 1.
Hieronder staat een tekening met 3 cirkels waarvan de omtrek uitgerold is. Meet de diameter en de omtrek van deze cirkels.



a. Vul de tabel in:

cirkel	diameter	omtrek	omtrek:diameter
I			
II			
III			

b. Wat valt je op ?

Opdracht 2.
Hieronder staat een tekst uit het Oude Testament. Hij komt uit 1 Koningen 7 waarin beschreven wordt hoe Salomo's paleis eruit heeft gezien. In vers 13-51 wordt 'Het metaalwerk van de tempel' beschreven:

> Verder maakte hij de gegoten zee; tien ellen was zij van haar enen tot haar anderen rand, rondom rond, en van vijf ellen in haar hoogte en een meetsnoer van dertig ellen omving ze rondom.
> (1 koningen 7:23)

Wat wordt hier gebruikt als verhouding $^{\text{omtrek}}/_{\text{diameter}}$?

Opdracht 3
Iemand maakt een karrewiel met een middellijn van 80 cm.

a. Wat is volgens de benadering van opdracht 2 de omtrek?
b. Als je 10 km gaat rijden met zo'n kar, hoe vaak draait dan een wiel met middellijn 80 cm rond ?

Opdracht 4.
De Babyloniërs (2000 v.Chr.) namen voor de verhouding omtrek/diameter soms 3, maar ook $3^{1}/_{8}$. In de vorige opdracht heb je uitgerekend hoe vaak een wiel met een middellijn van 80 cm ronddraait als je een afstand van 10 km aflegt.

a. Als de verhouding tussen de omtrek en de diameter $3^{1}/_{8}$ is, draait het wiel dan vaker of juist minder vaak rond?
b. Hoeveel keer meer of minder?

Het getal waarmee je de diameter van een cirkel moet vermenigvuldigen om de omtrek te krijgen is een heel bijzonder getal. In deze lessen gaan we op zoek naar dit getal.

De Egyptische klerk Ahmes schreef in de papyrus Rhind (1500 v.Chr.) dat de oppervlakte van een cirkel gelijk is aan $^{16}/_{9}$ maal de straal in het kwadraat. Je vermenigvuldigt de straal eerst met $^{16}/_{9}$. De uitkomst moet je dan kwadrateren om de oppervlakte uit te rekenen.

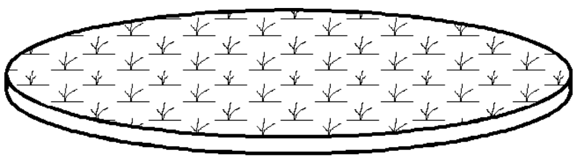
In het Brits Museum in Londen ligt een geschrift van de oude Egyptenaren. Het wordt het "papyrus Rhind" genoemd, naar de Engelsman Rhind, die dit geschrift ontdekt heeft.

Opdracht 5.
In een grasveld heeft de gemeentelijke plantsoenendienst een cirkelvormig bloembed aangelegd. De diameter van het bloembed is 2 meter.

a. Wat zou volgens Ahmes de oppervlakte van het bloembed zijn?

   In het bloembed moeten tulpen komen. Elke tulp heeft een 'stukje' grond nodig van 16 cm^2.

b. Hoeveel tulpen kunnen er maximaal in het bloembed staan?
c. Om het bloembed komt een hekje te staan. Hoe lang moet dat hekje ongeveer worden?



Opdracht 6.

a. Vul onderstaande tabel in:

straal	**straal^2**	**oppervlakte**
1	1	3,16
2	..	..
3	..	..
4	..	..

b. Klopt de volgende bewering: **"Als de straal 2 keer zo groot wordt, wordt de oppervlakte 4 keer zo groot."**

c. Bij de omtrek en de diameter is de verhouding omtrek/diameter steeds hetzelfde.
Is de verhouding oppervlakte/straal ook steeds hetzelfde ?
En de verhouding oppervlakte/straal^2?

d. Met welk getal moet je de straal^2 vermenigvuldigen om de oppervlakte te krijgen?

Het getal van opdracht 4 en opdracht 6d is hetzelfde getal.
Dat getal heeft zelfs een aparte naam gekregen. We schrijven dat getal als π, dat is een letter uit het Griekse alfabet en wordt uitgesproken als pi.
Ofschoon π een Griekse letter is, hebben de Grieken daarmee nooit de verhouding van omtrek en middellijn van de cirkel aangegeven. Dat gebeurt eigenlijk pas vanaf de 18^e eeuw.

$$\pi$$

Opdracht 7.

> Het oppervlak van de cirkel met middellijn d werd, door de oud-Egyptenaren, uit de formule $(d - {}^{d}/_{9})^2$ berekend, hetgeen tot een waarde van $\pi = {}^{256}/_{81} = 3.1605...$ leidt.

Laat zien dat deze formule op hetzelfde neerkomt als de berekening bij opgave 5.

Les 2

Hoe kun je een benadering voor π vinden ?

In les 1 hebben we verschillende 'benaderingen' voor π gevonden:

3, $3^1/_8$ en $(^{16}/_9)^2$

Een 'benadering' betekent dat je het getal (nog) niet precies kent. Het is wel ongeveer goed, maar **NIET** precies**.**

Opdracht 1.
Teken een cirkel met een straal van 10cm. Pas op de cirkel steeds weer de straal af. Je kunt nu een regelmatige zeshoek tekenen. Geef de hoekpunten de letters A t/m F, noem het middelpunt M.

a. Hoe lang is één zijde van deze zeshoek ?
Wat is dus de omtrek van de zeshoek ?
We weten nu dat π in ieder geval groter moet zijn dan 3.
Leg dat eens uit.

Pas nog een keer de straal af op de cirkel, maar nu zo dat je een regelmatige 12-hoek kunt tekenen. Dit kun je doen door de middelloodlijn van een van de zijden van de zeshoek te snijden met de cirkel en dan de straal af te passen.

b. Meet de lengte van één zijde van deze 12 hoek.
Wat is dus de omtrek van de 12-hoek ?
Welke benadering voor π heb je nu gevonden?

c. Teken een gelijkbenige driehoek met een tophoek van 15° en de twee gelijke zijden van 10 cm.
Meet de derde zijde.
Hoeveel van deze driehoekjes heb je nodig om een regelmatige veelhoek te maken?
Benader hiermee π.

Je zou hetzelfde kunnen doen voor een 48- of een 96-hoek. Maar meten is wel een beetje onnauwkeurig. Je zou het eigenlijk moeten berekenen, maar dat is een stuk lastiger. Archimedes, die leefde van 287 tot 212 v.Chr. in Griekenland, berekende met behulp van een 96-hoek dat π moest liggen tussen:

$$3^{10}/_{71} \text{ en } 3^{1}/_{7}$$

Opdracht 2.

> Ptolemeus, de Griekse sterrenkundige, gebruikte $^{377}/_{120}$ (=3,1416...), maar de volgende belangrijke verbetering kwam uit China, waar Zu Chongzhi en zijn zoon (...) de benadering $^{355}/_{113}$ gaven.
> Het resultaat van Zu werd pas verbeterd toen Al-Khasji in de vijftiende eeuw de waarde in 16 decimalen gaf. De Europese wiskundige lagen in die tijd ver achter.
> (...)
> In de zestiende eeuw evenwel wisten de Europese wiskundigen hun achterstand in te halen en vervolgens in een voorsprong om te zetten.

Lees bovenstaande tekst door. Welke landen spelen een rol in het stukje tekst hierboven ?

Opdracht 3.

Hieronder staat een stukje tekst over π. Het komt uit het boek '**Grondbeginselen der meetkunde**' door J.H. van Swinden, Amsterdam, MDCCCXVI:

> **XIX. voorstel**
> De rede van den omtrek eens cirkels tot zijne middellijn is kleiner dan van $3^{10}/_{70}$ tot 1, en grooter dan $3^{10}/_{71}$ tot 1: of, wat op het zelfde uitkomt, kleiner dan 22:7 en groter dan 223:71 volgens ARCHIMEDES.
> Die rede is naauwkeuriger als 3,1315926536:1 volgens LUDOLF VAN CEULEN: en de rede van 355:113, onder den naam van METIUS opgegeven, is bijna even naauwkeurig.

a. Uit welk jaar komt deze tekst?
b. Geef een ander woord voor 'rede'.
c. In de tweede regel staat 'wat op het zelfde uitkomt'.
   Klopt dat wel? Leg uit hoe dat zit.
d. De benadering van Ludolf van Ceulen is nauwkeuriger dan de benadering van Archimedes. Staat dat ook in de tekst ?
   (Aanwijzig: je leraar/lerares Nederlands vind het waarschijnlijk niet goed als je zegt: 'Mijn fiets is mooier als jouw fiets...')
e. Waarom staat er in de tekst geen letter π?.

Les 3

Spelen met π.

Opdracht 1.

> "I like a drink, pepsicola of course, after the heavy chapters involving quantum mechanics."

Dit zinnetje wordt weleens gebruikt om de eerste 14 decimalen van π te onthouden. Begrijp jij hoe dat zit ?

In de geschiedenis van de wiskunde hebben veel mensen geprobeerd zoveel mogelijk decimalen van π te vinden. We noemen er een paar:

Ludolph van Ceulen	(1610)	35 decimalen
John Machin	(1706)	100 decimalen
Johann Dase	(1844)	200 decimalen
William Shanks	(1853)	707 decimalen
ENIAC	(1949)	2.037 decimalen
CDC 6600	(1967)	500.000 decimalen
Tamura & Kanada	(1983)	16.777.216 decimalen

De bedoeling van dit soort berekeningen kan zijn om te onderzoeken of de decimalen van π misschien regelmatigheden vertonen. Je kunt bijvoorbeeld kijken of alle cijfers wel even vaak voorkomen.

Opdracht 2.
Hieronder staan de eerste 40 decimalen van π.

3, 141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 502 884 197 2...

a. Onderzoek welk cijfer tot en met de 40^{e} decimaal het meeste voorkomt.

   Over het algemeen wordt aangenomen dat de decimale ontwikkeling van π geen enkel patroon vertoont. Het lijkt net of elke volgende decimaal in feite toevallig is.

b. Kunnen er 'ergens' in de decimale ontwikkeling van π zes negens achter elkaar voorkomen ?
c. Kan de rij 123456789 ergens in de decimale ontwikkeling van π voorkomen?

Opdracht 3. Leibniz (1673)
Stel je voor je hebt de volgende 'oneindige' som:
De puntjes geven aan dat de rij eigenlijk nog veel verder door loopt, sterker nog: je kunt er oneindig lang mee doorgaan.

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}+\ldots$$

a. Hoe gaat de rij verder ?

Met een computer kun je uitrekenen wat er uitkomt als je hier een tijdje mee door zou gaan, maar met de rekenmachine gaat het ook wel. Het kan zo:

1	-	1	÷	3	+	1	÷	5	-	1	÷	7	+	..	

Enzovoorts....

b. Reken de som tot en met $^1/_{23}$ uit.
Vermenigvuldig je antwoord met 4.
Wat komt er uit ?

Als je maar lang genoeg doorgaat, zou er bij vraag b. uiteindelijk eigenlijk π uit moeten komen. Maar het duurt lang...

Opdracht 4.
Nog zo'n oneindige som:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots$$

Dit kan weer makkelijk met de rekenmachine:

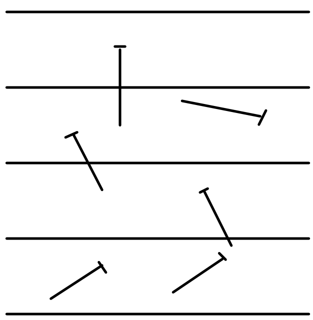
1	+	1	÷	4	+	1	÷	9	+	1	÷	16	+	..	

a. Bereken deze som tot met $^1/_{10}2$.

b. Vermenigvuldig je antwoord met 6. Neem de wortel van deze uitkomst.Wat komt er uit ?

Ook hier komt er bij b. uiteindelijk π uit, maar ook dit duurt even...

Opdracht 5.
We gaan het volgende experiment doen: we laten van enige hoogte een naald willekeurig op een vlak met lijnen vallen. De lengte van deze naald is precies evengroot aan de onderlinge afstand tussen 2 lijnen.



Nu zijn er twee mogelijkheden:
1. De naald valt op een lijn.
2. De naald valt tussen twee lijnen in.

We voeren het experiment 1200 keer uit en krijgen de volgende resultaten:

1200 keer gooien met de naald.	
op een lijn	**tussen de lijnen**
764	436

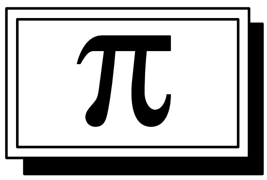
a. Benader met deze gegevens de kans dat een naald op een lijn valt.
(Aanwijzing: om een **kans** uit te rekenen deel je het aantal keren dat een gebeurtenis plaats vindt, door het totaal aantal keren. De uitkomst is de **kans** op die gebeurtenis.)

Graaf Georges Buffon (1707-1788), een bioloog, heeft aangetoond dat de kans dat de naald op een lijn terecht komt gelijk moet zijn aan ${}^{2}/_{\pi}$.

b. Klopt dit met de gevonden resultaten van bovenstaand experiment?
Laat zien hoe je het gedaan hebt.

Opdracht 6.
Op je rekenmachine zit ook een π-toets.

a. Wat geeft je rekenmachine voor π ?
b. Hoeveel decimalen geeft je rekenmachine ?
c. Benader met je rekenmachine in 2 decimalen:



I. $\pi.12^2 =$

II. ${}^{1}/_{4}.\pi.24^2 =$

III. $(12.\sqrt{\pi})^2 =$

IV. ${}^{1}/_{\pi} + 2.\pi^2 =$

Les 4

Rekenen met π .

Met de volgende formules kun je omtrek en oppervlakte van een cirkel uitrekenen.

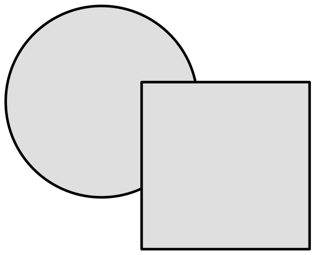
Omtrek = $\pi \cdot$ diameter = $2 \cdot \pi \cdot$ straal

Oppervlakte = $^1/_4 \cdot \pi \cdot$ diameter^2 = $\pi \cdot$ straal^2

Opdracht 1.
Je kunt bij het berekenen van de omtrek of de oppervlakte van een cirkel de diameter of de straal gebruiken.

a. Laat zien dat de formules eigenlijk hetzelfde zijn.
b. Welke formule is handig voor de omtrek ?
c. En welke formule is handig voor de oppervlakte ?

Opdracht 2.
Een beroemd probleem uit de oudheid is de kwadratuur van de cirkel. De oude Grieken hebben zich indertijd al afgevraagd of je bij één of andere cirkel, met alleen passer en lineaal, een vierkant kan construeren met dezelfde oppervlakte als die cirkel.



In de loop der tijd hebben heel veel mensen dat geprobeerd. Zelfs toen wiskundigen al lang bewezen hadden dat het onmogelijk was. Construeren gaat dus niet, maar er aan rekenen kunnen we wel.

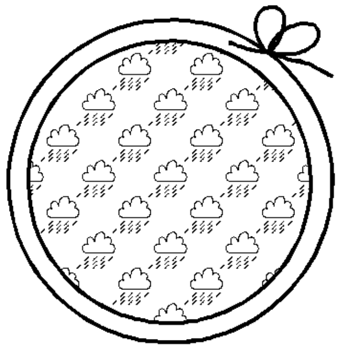
a. Teken een cirkel met een diameter van 10 cm. Bereken de zijde van het vierkant en teken dat vierkant, dat (ongeveer) dezelfde oppervlakte heeft als de cirkel.
b. Bereken ook de zijde van het vierkant en teken dat vierkant met ongeveer dezelfde omtrek als de cirkel met een diameter van 10 cm.

Opdracht 3.

a. Een cirkel heeft een omtrek van $16\cdot\pi$. Bereken de oppervlakte van die cirkel.
b. Een cirkel heeft een oppervlakte van $16\cdot\pi$. Bereken de omtrek van die cirkel.
c. Welke van onderstaande beweringen is waar ?

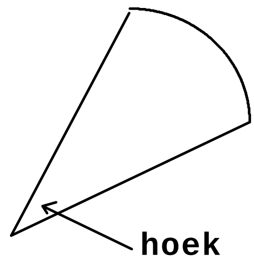
- Als de straal twee keer zo groot wordt, wordt de omtrek ook twee keer zo groot.
- Als de omtrek twee keer zo groot wordt, wordt de oppervlakte vier keer zo groot.
- De oppervlakte van een cirkel = $^1/_2\cdot r\cdot$ omtrek.

Opdracht 4. Een touw om de aarde.



De omtrek van de aarde is ongeveer 40.000 km. Stel je voor je neemt een stuk touw van 40.000 km en dat doe je om de aarde heen. Na een tijdje vind je eigenlijk dat het touw 10 meter langer moet worden. Nu past het touw niet meer precies om de aarde. We hangen het touw overal even ver van de aarde af. Hiervoor slaan we allemaal paaltjes in de grond.
De vraag is: hoe hoog komt het touw te hangen ?

Een **cirkelsegment** is een stukje van een cirkel in de vorm van een taart- of pizzapuntje. Als je de hoek weet, kun je de omtrek en de oppervlakte van zo'n cirkelsegment uitrekenen.



We geven een voorbeeld: Veronderstel dat de hoek van het segment 30° is en dat de straal van de cirkel 10 is. De omtrek van de hele cirkel is $20\cdot\pi \approx 62{,}8318..$
De lengte van het boogje:

$$\frac{30°}{360°}\cdot 62{,}8318.. \approx 5{,}24$$

Dus de omtrek is $10 + 10 + 5{,}24 \approx 25{,}24$.

De oppervlakte van de hele cirkel is $\pi\cdot 10^2 \approx 314{,}159...$

De oppervlakte van het segment is $\frac{30°}{360°}\cdot 314{,}159.. \approx 26{,}18$

Opdracht 5.
Bereken de omtrek en de oppervlakte van een cirkelsegment met straal 8 en een hoek van 45°.

Opdracht 6.
Eén van de problemen (probleem 41) uit de papyrus Rhind gaat over de inhoudsberekening van een cilindervormige korenschuur.
Op de papyrus Rhind staat de volgende berekening:

1/9 van 9 is 1. Er blijft 8 over. 8 keer 8 is 64.
Vermenigvuldig 64 met 10 en je krijgt de 640 kubieke el.
Tel de helft er bij op en je krijgt 960, dat is de inhoud in *khar*.
Neem 1/20 van 960, dat is 48. De inhoud is 4800 *hekat*.

a. Bereken eerst zelf de inhoud van een cilinder met een diameter van 9 el en een hoogte van 10 el. (Aanwijzing: de inhoud kun je uitrekenen door de oppervlakte van het grondvlak (een cirkel !!!) te vermenigvuldigen met de hoogte.)
b. Krijg je hetzelfde antwoord als Ahmes, de 'schrijver' van de papyrus Rhind? Zo nee, leg uit hoe dat komt.
c. Vul in:

   1 kubieke el = ... khar = ... hekat.

Puzzles.

1. Geef nog drie termen van de volgende rijen:

   a. 14, 15, 92, 65, ...
   b. 3, 4, 8, 9, 14, 23, 25, 31, ...

2. Waarom staat onderstaand rijmpje op deze bladzijde?

   Eva, o lief o zoete hartedief
   Uw blauwe oogen
   zijn wreed bedrogen.

3. Wat past beter: een cirkel in een vierkant of een vierkant in een cirkel ?

πloot
πstool
πranja
kanarieπt
πtlut
πkeren
πp

Handleiding

Deze lessenserie bestaat uit 4 lessen. Ze zijn bedoeld voor een tweede klas havo/vwo. In de inleiding kunt u meer lezen over de grote lijnen en de achtergronden van π.

Voorkennis:
Bekendheid met begrippen omtrek en oppervlakte.
Kunnen rekenen met verhoudingen.
Kunnen werken met eenvoudige formules.

Doelstellingen:
Kunnen berekenen van omtrek en oppervlakte van cirkels en cirkelsegmenten. Kunnen werken met de formules voor de omtrek en de oppervlakte van een cirkel.
Een idee hebben wat het getal π voorstelt en iets weten over de geschiedenis van π.
Kunnen rekenen met π.

Les 1.
In les 1 maken leerlingen opnieuw kennis met de begrippen omtrek en oppervlakte. Na les 1 weten leerlingen dat de verhouding diameter en omtrek constant is. Ook weten ze dat de verhouding van straal^2 en oppervlakte dezelfde constante is en dat dit getal π wordt genoemd.

Les 2.
In les 2 gaan leerlingen eerst proberen zelf een benadering voor π te vinden met behulp van een 6-, 12- en 24-hoek.

Les 3.
In les 3 komt het zoeken naar decimalen van π aan bod. Leerlingen zien enkele 'vreemde' voorbeelden van π in andere situatie dan bij cirkels. Aan het eind van les 3 kunnen leerlingen met de rekenmachine rekenen met π.

Les 4.
Leerlingen worden geacht de formules voor cirkels uit het hoofd te leren en de formules toe te kunnen passen.
Naast cirkels komen cirkelsegmenten aan bod. Bovendien wordt er een eerste stap genomen naar de inhoudsberekening van een cilinder.
Aan het einde van les 4 zijn wat puzzles opgenomen.

Toets.
Aan het einde van les 4 kan men de leerlingen een toets afnemen.

Antwoorden
Zowel de antwoorden van de lessen als de antwoorden van de toets kunt u in deze bundel vinden.

LES 1

Opdracht 1.

a. Tabel invullen.
b. Er komt steeds ongeveer 3 uit.

Opdracht 2.

Het getal 3.

Opdracht 3.

a. 240 cm.
b. 4166 keer.

Opdracht 4.

a. Minder vaak.
b. 4000 keer i.p.v. 4166

Opdracht 5.

a. 3,16 m^2
b. 1975
c. $3 \cdot 2m = 6m$.

Opdracht 6.

a.

straal (m)	$straal^2$ (m²)	oppervl. (m²)
1	1	3,16
2	4	12,64
3	9	28,44
4	16	50,57

b. Ja.
c. Nee. Ja.
d. 3,160625.

Opdracht 7.

$(d - {}^{d}/_{9})^2 = ({}^{8}/_{9}d)^2 = ({}^{16}/_{9}r)^2$

LES 2

Opdracht 1.

a. 10 cm.
   60 cm.
   Boogje is langer dan een lijntje.
b. 5,2 cm.
   62,4 cm.
   $\pi \approx 3,12$.
c. 2,6 cm.
   24 driehoekjes.
   omtrek: 62,4.
   $\pi \approx 3,12$.

Opdracht 2.

Griekland, China, Arabië, Europese landen.

Opdracht 3.

a. 1816.
b. Verhouding.
c. $3^{10}/_{70} = {}^{22}/_{7}$ enz.
d. 'Als' is iets anders dan 'dan'.
e. Tja...

LES 3

Opdracht 1.

Tel de letters van de woorden.

Opdracht 2.

a.

cijfer	aantal
0	1
1	3
2	6
3	7
4	4
5	4
6	3
7	3
8	5
9	5

b. Ja dat zou kunnen. Sterker nog het gebeurt: op de 762de tot en met de 767de plaats.[38]
c. Het kan, maar tot de eerst 16 miljoen decimalen gebeurt het niet.[39]

[38] Wells, blz. 48
[39] Wells, blz. 49

Opdracht 3.

a. $+\frac{1}{21}-\frac{1}{23}+\frac{1}{25}-\frac{1}{27}+\frac{1}{29}-\frac{1}{31}+\ldots$

b. 3,058402766..

Opdracht 4.

3,049361636..

Opdracht 5.

a. $P(\text{op een lijn}) = \frac{764}{1200} = 0{,}636666\ldots$

b. $^{2}/_{0,6366666...} \approx 3{,}14136.. \approx \pi$.

Opdracht 6.

a. 452,39
b. 452,39
c. 452,39
d. 20,06

LES 4

Opdracht 1.

a. $\pi \cdot d = \pi \cdot 2 \cdot r = 2\pi \cdot r$

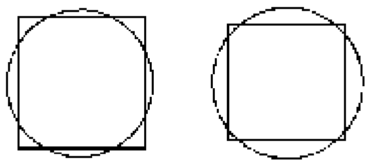
$^{1}/_{4} \cdot \pi \cdot d^2 = {}^{1}/_{4} \cdot \pi \cdot (2r)^2 = {}^{1}/_{4} \cdot \pi \cdot 4 \cdot r^2 = \pi \cdot r^2$

b. $\pi \cdot d$

c. $\pi \cdot r^2$

Opdracht 2.

a. b



Opdracht 3.

a. $64 \cdot \pi$.
b. $8 \cdot \pi$.
c. - Ja
- Ja
- Ja

Opdracht 4.

De paaltje worden ongeveer 1,59 meter.

Opdracht 5.

Omtrek is $2 \cdot \pi$
Oppervlakte is $8 \cdot \pi$

Opdracht 6.

a. 636,17 el^3.
b. Nee, andere benadering voor π.
c. 1 el^3 = 1,5 khar = 5 hekat.

Puzzles.

1.

a. 14,15,92,65,35,89,79,32,...

(dit zijn dus gewoon de decimalen van π)

b. 3,4,8,9,14,23,25,31,36,39,44, 52,61,68,71,...

(elk volgende getal wordt vermeerderd met een decimaal van π)[40]

2.

Zie les 3 opdracht 1.

3.

Verhouding $^{\text{klein}}/_{\text{groot}}$:

cirkel in een vierkant: $^{\pi}/_{4}$

vierkant in een cirkel: $^{2}/_{\pi}$

$^{\pi}/_{4} > {}^{2}/_{\pi}$

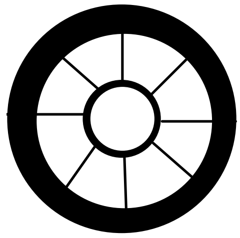
Conclusie:

Een cirkel in een vierkant past beter dan een vierkant in een cirkel.

[40] Deze puzzles zijn natuurlijk pas leuk in een context waar je geen π verwacht.

Toets

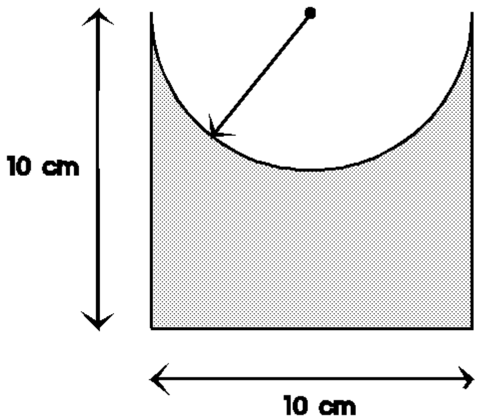
Opdracht 1.
Jolien heeft iets aardigs bedacht. Zij neemt een wiel met een doorsnede van 80 cm. Zij loopt met dat wiel net zo ver, dat het wiel precies 10 keer rond gaat. De afstand die ze zo heeft afgelegd is 25,13 m.
Hiermee kan ze een benadering voor π vinden.



a. Benader met deze gegevens π.
b. Hoeveel decimalen zijn er goed van deze benadering?
c. Hoe kan Jolien een betere benadering voor π vinden?

Opdracht 2.
Benader met je rekenmachine in 3 decimalen:
a. $\pi \cdot 6{,}2^2 =$
b. $0{,}25 \cdot \pi \cdot 5^2 =$
c. $(2{,}4 \cdot \pi)^2 =$

Opdracht 3.
De figuur hiernaast bestaat uit een vierkant van 10 bij 10 centimeter. Hieruit heeft men een halve cirkel weggezaagd.
Bereken de omtrek en de oppervlakte van deze figuur in 1 decimaal nauwkeurig.



Opdracht 4.
Archimedes heeft een boekje geschreven dat heet **'Cirkelmeting'**. Hierin staat o.a. het volgende: Als je een cirkel hebt en je maakt een rechthoekige driehoek, waarvan de ene rechthoekszijde gelijk is aan de omtrek en de andere rechthoekszijde gelijk is aan de straal, dan hebben de cirkel en driehoek dezelfde oppervlakte.
Onderzoek of dit klopt en leg uit hoe je aan je antwoord komt.

Opdracht 5.
Een boer heeft genoeg prikkeldraad en paaltjes om een hek te maken van 40 meter. Hij wil hiermee in een weiland een zo groot mogelijk stuk land afzetten voor zijn twee vrolijk wroetende hangbuikzwijntjes. Bereken de groots mogelijke oppervlakte van het stuk land dat de boer kan afzetten in 1 decimaal nauwkeurig.

Antwoorden toets

Opdracht 1.

a. 3,14125.
b. 3 decimalen zijn goed.
c. Hier zijn vele antwoorden goed:
   - Met het wiel honderd keer rond.
   - Met de π-toets van de rekenmachine.
   - Gebruik de benadering met 40 decimalen van les 3.
   - enz...

Opdracht 2.

a. 120,763
b. 19,635
c. 56,849

Opdracht 3.

a. 471,2
b. 60,7

Opdracht 4.

Oppervlakte driehoek = $^1/_2 \cdot 2\pi \cdot r \cdot r = \pi \cdot r^2$

Opdracht 5.

Maximale oppervlakte is 127,3 m^2

Literatuur

Bijbel, Het Nederlands Bijbelgenootschap, Amsterdam, 1969.

Carl B.Boyer & Uta C.Merzbach, *A History of Mathematics*, 2nd edition, 1989.

David Wells, *Woordenboek van Eigenaardige en Merkwaardige Getallen*, 1986.

Prof. Dr.D.J. Struik, *Geschiedenis van de wiskunde*, Utrecht, 1969.

Reader, *Geschiedenis van de wiskunde*, FEO Hogeschool Utrecht, 1995/1996.

Reader, *Bronnen bij geschiedenis B*, FEO Hogeschool Utrecht.

A.J.Goddijn, *Decimalen van heinde en ver*, Nieuwe Wiskrant, april 1995.

Netwerk 2 havo/vwo, Wolters Noordhoff, Groningen.